Cálculo II – 2020/2021

Aula 12

1/6

Planificação **Aula 12** (E@D)

TP4D: 3ª feira, 27/04, 16h30

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

$\boxed{\text{Slides 14 a 17}}$ Limites

Ler:
- Definição de limite de uma sucessão (slide 15)
- Definição de limite de uma função de várias variáveis reais (slide 16)
- Exemplos (slides 15 e 17)

$\boxed{\text{Slides 21 e 22}}$ Métodos para provar que um limite existe

1.º Método: Produto de um infinitésimo por uma função limitada

Proposição (slide 21): Sejam f e $g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e (a,b) um ponto de acumulação de D.
Se $\underbrace{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0}_{\text{infinitésimo}}$ e g é limitada em $D \cap B_r((a,b))$ para algum r,
então $\boxed{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\times g(x,y) = 0}$

Exercício 1: Calcule, caso existam:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} (x^2+y-4)\times \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2}$

2.º Método: Mudança de variável

Proposição (slide 22): Sejam f, g e h três funções tais que $f(x,y) = g(h(x,y))$, com domínio D, e seja (a,b) um ponto de acumulação de D.
Suponha-se que $\boxed{\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = c \quad \text{e} \quad \lim_{u\to c} g(u) = \ell.}$

Se g é contínua em c (ou g não está definida em c) então

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell}$$

Exercício 2: Calcule, caso existam:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{e^{y^2-2x}-1}{3(y^2-2x)}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{1-\cos(x+y-1)}{(x+y-1)^2}$

Slide 18 Limite segundo subconjuntos (limites trajetoriais)

Definição: Sejam $f: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $S\subset D$ e (a,b) um ponto de acumulação de D. Diz-se que o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende para (a,b) restrito a S é l se $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in S}} f(x,y)=l$.

Nota: Ver exemplo do slide 18

Exercício 3: Seja $f(x,y)=\dfrac{3x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Calcule $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} f(x,y)$ e $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in R}} f(x,y)$

onde $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x=0 \wedge y\neq 0\}$ e $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=x \wedge x\neq 0\}$

Slides 19 e 20 Método para provar que um limite não existe

Observação: Para funções de 1 variável temos que existe limite num ponto se os limites laterais nesse ponto existem e são iguais, isto é,

$$\lim_{x\to a} f(x)=l \iff \lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=l$$

Para funções de 2 variáveis, a observação anterior generaliza-se da seguinte forma:

Proposição: Sejam $f: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $S\subset D$ e (a,b) um ponto de acumulação de S. Se existir $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ então também existe $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in S}} f(x,y)$ e são os dois iguais.

Através da proposição anterior obtemos a seguinte forma de provar que um limite não existe. (importante)

Observação: Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $S \subset D$ e $R \subset D$ e (a,b) um ponto de acumulação de S e R.

- Se $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in S}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in R}} f(x,y)$, ou pelo menos um destes limites não existe, então não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$
- Se os limites trajetoriais anteriores forem iguais nada se pode concluir.

Exercício 4: usando o exercício 3, o que pode concluir sobre a existência do limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Método alternativo para provar que um limite não existe

↳ usar uma trajetória que depende de um parâmetro $m \in \mathbb{R}$

Para provar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não existe usar uma das trajetórias

$$\begin{array}{lcl} y-b = m(x-a) & & x-a = m(y-b) \\ y-b = m(x-a)^2 & \text{ou} & x-a = m(y-b)^2 \qquad (m \in \mathbb{R}) \\ y-b = m(x-a)^3 & & x-a = m(y-b)^3 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

de tal forma que o limite trajetorial dependa de m.

Exercício 5: Mostre que não existem os limites:

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{3x^2-(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$$

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

Slides 23 e 24 **Continuidade**

Definição: • Uma função $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diz-se **contínua** num ponto de acumulação $(a,b) \in D$ se

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)}$$

• f é contínua num subconjunto $S \subseteq D$ se é contínua em todos os pontos de S.

Exercício 6: Verifique se $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}((x-3)^2+y^2)}{(x-3)^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (3,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (3,0) \end{cases}$

é contínua em $(3,0)$.

Exercício 7: Verifique se $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

é contínua em $(0,0)$.

Nota: ler propriedades das funções contínuas (slide 24)

Slides 26 a 31 **Derivadas Parciais**

Recordar o caso de uma variável

Derivada de f em $x = a$ $\rightsquigarrow$ $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Notações: $f'(a)$ ou $\dfrac{df}{dx}(a)$

Geometricamente, se $f'(a)$ existir, representa o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$

Derivadas parciais de 1ª ordem

Seja $f(x,y)$ uma função de 2 variáveis.

Notações: $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou f'_x ⤳ derivada parcial de f em ordem a x

$\frac{\partial f}{\partial y}$ ou f'_y ⤳ " " " " " " y

Nota: As derivadas parciais podem ser calculadas usando a definição dada a seguir, ou as regras de derivação (ver final desta aula).
Nalguns casos só se pode usar a definição (por exemplo nos pontos onde a função muda de ramo).

Definição: Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in int(D)$. Tem-se que:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$

(Se os limites existirem)

Interpretação geométrica

↳ $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ dá-nos o declive da reta contida no plano $y=b$ e que é tangente no ponto $P=(a,b,f(a,b))$ à curva de interseção do gráfico de f com aquele plano. (ver applets slides 27 e 28)

Nota: A definição anterior pode ser adaptada para funções com mais variáveis.

Exercício 8: Seja $f(x,y) = y^2 - 2xy$. Calcular, por definição,

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ b) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$

Exercício 9: Seja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Calcular:

a) $f'_x(0,0)$ b) $f'_y(0,0)$

Calcular derivadas parciais usando as regras de derivação

$\frac{\partial f}{\partial x}$ ⇝ deriva-se como se y fosse uma constante

$\frac{\partial f}{\partial y}$ ⇝ " " " x " " "

Exercício 10: Calcule as derivadas parciais de 1.ª ordem das seguintes funções:

a) $f(x,y) = 2x^5 - y^3 + 2y + 7$

b) $g(x,y) = x^3 y^2$

c) $h(x,y) = \ln(5x-y) + \operatorname{arcsen}(x^3)$

d) $i(x,y,z) = x^3 \times \cos(z-5x) + e^{4y} \operatorname{sen} y$

Observação: Ver exemplo do slide 31 sobre derivação de funções por ramos

Vetor gradiente de $f(x,y)$

↳ $\boxed{\nabla_f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \,;\, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)}$

Exercício 11: Usando o exercício 10 b), calcular $\nabla_g(-1,2)$.

TPCs: Exercícios do slide 25

Folha prática 3: 5, 6, 7, 10

1.º Teste, 13/04/2018 → Ex. 6 c)

Aula 12

1 a) $\lim_{(x,y)\to(2,0)} \underbrace{(x^2+y-4)}_{f(x,y)} \times \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)}_{g(x,y)}$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$

(2,0) é um ponto de acumulação de D

Como $\lim_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y) = 2^2+0-4 = 0$

e g é limitada em D, pela proposição do slide 21, o limite pedido é zero

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{xy}_{\to 0} \times \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitado}} = 0$

↳ pelas propriedades dos limites

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(0,0) é ponto de acumulação de D

Nota: $0 \leq x^2 \leq x^2+y^2$ $\div\, x^2+y^2$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2}$

↳ limitada em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

O mesmo sucede para $\frac{y^2}{x^2+y^2}$

2) a) $\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{e^{y^2-2x}-1}{3(y^2-2x)} \left(\frac{0}{0}\right)$

Seja $u = y^2-2x$. Se $(x,y) \to (2,2)$ então $u \to 2^2-2\times2=0$

Então $\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{e^{y^2-2x}-1}{3(y^2-2x)} = \lim_{u\to0} \frac{e^u-1}{3u}$

$= \frac{1}{3} \lim_{u\to0} \frac{e^u-1}{u} = \frac{1}{3}\times 1 = \frac{1}{3}$

Limites Notáveis

$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x\to0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{1-\cos(x+y-1)}{(x+y-1)^2} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{u\to0} \frac{1-\cos u}{u^2} \left(\frac{0}{0}\right) \underset{\text{Regra de Cauchy}}{=} \lim_{u\to0} \frac{(1-\cos u)'}{(u^2)'}$

$= \lim_{u\to0} \frac{\operatorname{sen} u}{2u} = \frac{1}{2} \lim_{u\to0} \frac{\operatorname{sen} u}{u}$

$= \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$

Seja $u = x+y-1$. Se $(x,y) \to (0,1)$ então $u \to 0+1-1=0$

Exercício 3: $f(x,y) = \frac{3x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \wedge y \neq 0\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in S}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\cancel{-y^2}}{\cancel{y^2}} = -1$$

(0,0) é ponto de acumulação de S e de R

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x \wedge x \neq 0\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in R}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} \frac{3x^2-y^2}{x^2-y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2-x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2x^2}}{\cancel{2x^2}} = 1$$

Exercício 4: Como os limites trajetoriais do ex. 3 deram diferentes, pela observação anterior não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Ex. 5)

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{3x^2-(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

Usar uma trajetória tal que todas as parcelas do numerador fiquem com o mesmo grau e todas as parcelas do denominador também (mas os graus do numerador e do denominador podem ser diferentes)

Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y-1 = mx, x \neq 0\}$

(0,1) é ponto de acumulação de A_m

Então
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1) \\ y-1=mx}} \frac{3x^2-(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2-(mx)^2}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(3-m^2)}{x^2(1-m^2)}$$
$$= \frac{3-m^2}{1+m^2}$$

Como o limite trajetorial depende de m então o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{3x^2-(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$ não existe.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ Seja $A_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = my^2, y \neq 0\}$ (0,0) é ponto de acumulação de A_m

Então
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x=my^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{my^2 y^2}{(my^2)^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{my^4}{m^2y^4+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{m\cancel{y^4}}{\cancel{y^4}(m^2+1)} = \frac{m}{m^2+1}$$

Como o limite trajetorial depende de m então o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ não existe.

Ex.6. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{Sen}((x-3)^2+y^2)}{(x-3)^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(3,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(3,0)\end{cases}$

1º Passo: Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(3,0)} \dfrac{\operatorname{Sen}((x-3)^2+y^2)}{(x-3)^2+y^2} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\operatorname{Sen} u}{u} = 1$ limite notável

Seja $u=(x-3)^2+y^2$. Se $(x,y)\to(3,0)$ então $u\to(3-3)^2+0^2=0$

2º Passo: Calcular $f(3,0)=0$

Conclusão: Como $\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)} f(x,y)\neq f(3,0)$ então f não é contínua em $(3,0)$

Ex 7. Como, pelo ex. 5 b), $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$, não existe, então f não é contínua em $(0,0)$.

Exercício 8 $f(x,y)=y^2-2xy$

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h,1)-f(0,1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}} = -2$

por definição

C. aux $f(h,1)=1^2-2\times h\times 1 = 1-2h$

$f(0,1)=1^2-2\times 0\times 1 = 1$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,1+h)-f(0,1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cancel{1}-2h+h^2-\cancel{1}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h\to 0}(2+h)$

$=2+0=0$

C. aux $f(0,1+h)=(1+h)^2-\underbrace{2\times 0\times(1+h)}_{=0}=1+2h+h^2$

Exercício 9: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$

a) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h}=1$

C. aux $f(h,0)=\dfrac{h^3-0^3}{h^2+0^2}=\dfrac{h^3}{h^2}=h$

$f(0,0)=0$

b) $f'_y(0,0)=\underset{\text{TPC}}{\ldots}=-1$